[P1] Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator. Die Zustandssumme wurde in der Vorlesung berechnet zu

$$Z = \frac{\mathrm{e}^{-\beta\frac{1}{2}\hbar\omega}}{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}}\,.$$

Der Dichteoperator ist gegeben als $\rho = Z^{-1}\mathrm{e}^{-\beta H}$, wobei H der Hamiltonoperator ist.

(1) Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie, d.h.

$$E = \langle H\rangle = \mathrm{tr}(H\rho)$$

und zeigen Sie, daß dieser gegeben ist als

$$E = -\frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial\beta}Z\,.$$

(2) Das Einstein-Modell eines Festkörpers mit gegebener Temperatur und konstantem Volumen beschreibt diesen als ein Ensemble von $\mathcal{N}$ Atomen, die alle unabhängig voneinander mit derselben Frequenz ω_E um ihre Gleichgewichtslage schwingen – also als $\mathcal{N}$ unabhängige gleiche harmonische Oszillatoren. Die innere Energie U ist nach diesem Modell einfach $U = 3\mathcal{N}\langle H\rangle$. Begründen Sie dies und berechnen Sie die spezifische Wärme $c_V = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}$. Hinweis: Drücken Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}$ durch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}$ aus.

[P2] Das *Strahlungsgesetz von Planck*: Es sei L die Seitenlänge eines kastenförmigen Hohlraums mit ideal reflektierenden Wänden. Ein strahlungserfüllter Hohlraum ist zu einem Ensemble unabhängiger harmonischer Oszillatoren äquivalent, wobei die möglichen Frequenzen durch die erlaubten Schwingungsmoden bestimmt sind.

(1) Bestimmen Sie die Dichte $N(\omega)\mathrm{d}\omega$ möglicher Moden im Frequenzbereich zwischen ω und $\omega + \mathrm{d}\omega$. Machen Sie dazu die Näherung, daß Sie für $k \ll L$ die Wellenzahlvektoren $\vec{k}$ zu gegebener Energie $E = \hbar\omega = \hbar c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ als kontinuierliche Variablen auffassen können. Gehen Sie zu Kugelkoordinaten über und integrieren Sie über den Raumwinkel. Beachten Sie schließlich, daß $k_i \geq 0$ ist ($i = x, y, z$), und daß Photonen in zwei Polarisierungen vorkommen. Bemerkung: Man kann allgemeiner zeigen, daß die Modendichte für $k \ll \mathcal{V}^{\frac{1}{3}}$ unabhängig von der speziellen Gestalt des Hohlraumes ist.

(2) Die Energiedichte $u(\omega)\mathrm{d}\omega$ im Frequenzbereich zwischen ω und $\omega+\mathrm{d}\omega$ ist pro Volumeneinheit gegeben durch $u(\omega) = \frac{1}{\mathcal{V}}N(\omega)(\langle H\rangle - \frac{1}{2}\hbar\omega)$. Begründen Sie, warum man hier die Grundzustandsenergie abzieht und berechnen Sie $u(\omega)$. Sie erhalten das Strahlungsgesetz von Planck. Bemerkung: Der Erwartungswert der Energie eines *klassischen* harmonischen Oszillators ist $\langle H_{\text{klassisch}}\rangle = kT = 1/\beta$. Die klassische Betrachtung führt also unmittelbar zum Rayleigh-Jeans-Gesetz.

Die folgenden Aufgaben können Sie verwenden, um sich auf die Klausur vorzubereiten, die am 7. Juni 2001 um 8:00 Uhr im kleinen Physik Höhrsaal im Hauptgebäude stattfindet. In der Klausur sind keine Hilfsmittel erlaubt. Wer will, kann zur Aufbesserung des Punktestandes, oder aus Vollständigkeitsbestreben, die Aufgaben abgeben.

[H1] Ein Operator sei definiert als $a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X}{x_0} + \mathrm{i}\frac{P}{p_0}\right)$ mit x_0, p_0 reell. Welche Relation müssen x_0 und p_0 erfüllen, damit $[a, a^+] = 1$ gilt? Es sei nun $a^+a \propto H$ für einen Hamiltonoperator $H = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{\kappa}{2}X^2 + const$. Bestimmen Sie x_0 als Funktion von m und κ, sowie die Konstante *const*. Berechnen Sie die normierte Wellenfunktion $\Psi_0(x)$ des Grundzustandes. (2 P.)

[H2] Berechnen Sie die Energie-Eigenwerte und die Eigenvektoren des Hamiltonoperators $H = \frac{\hbar}{2}B(\cos(\theta)\sigma_x + \sin(\theta)\sigma_z)$ mit $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Wie entwickelt sich der Zustand $\Psi(t)$, der zur Zeit $t = 0$ durch $\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben ist? (1 P.)

[H3] Geben Sie eine allgemeine untere Schranke für das Produkt der Schwankungen zweier Messungen an und spezialisieren Sie dies für den Fall von Orts- und Impulsmessungen. Welche algebraische Relation verhindert, daß sich ein Teilchen an einem Ort mit wohldefiniertem Impuls aufhalten kann? (1 P.)

[H4] Ein quantenmechanisches Teilchen bewegt sich mit Energie $E > V_0$ im Potential $V(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x < 0 \\ V_0 & \text{falls} \quad x > 0 \end{cases}$. Bestimmen Sie den Reflexionskoeffizienten. (2 P.)

[H5] Einem Elektron seien aus Energiegründen nur der Bahndrehimpuls $\ell = 1$ und die zwei Spineinstellungen $S_z = \pm\frac{\hbar}{2}$ möglich. Führen Sie geeignete Bezeichnungen für die sechs möglichen Basiszustände ein, sodaß Bahndrehimpuls- und Spinquantenzahlen ablesbar sind. Zeigen Sie, daß der Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ einen Satz von Drehimpulsoperatoren bildet (die Komponenten von $\vec{J}$ also eine Drehimpulsalgebra erfüllen), und geben Sie die Basisvekrtoren der j-Multipletts an, d.h. die Eigenzustände zu $\vec{J}^2$ und J_z. (2 P.)

[H6] In einem quantenmechanischen Drei-Zustands-System sei der Hamiltonoperator durch

$$H = E \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\mathrm{i} \\ ? & 2 & -\mathrm{i} \\ ? & ? & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wie lautet H vollständig? Bestimmen Sie das Spektrum von H sowie die normierten Eigenzustände Λ_i, $i = 1, 2, 3$. Ein quantenmechanischer Zustand habe für $t = 0$ die verschwindende Komponente Ψ_2 und Ψ_3. Geben Sie $\Psi_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, zu allen Zeiten an. Ein Meßapparat habe einen Eigenzustand mit drei gleichen Komponenten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt der zugehörige Maßwert auf, falls Sie den Zustand $\Psi(t) = (\Psi_1(t), \Psi_2(t), \Psi_3(t))^t$ vermessen? (2 P.)